

Análisis Funcional

Examen II



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Análisis Funcional

Examen II

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2023/24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1 (3 puntos). Teorema de representación de Riesz-Fréchet en espacios de Hilbert.

Ejercicio 2 (2.5 puntos). Sea $E = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = 0\}$ con la norma usual

$$\|u\| = \max_{t \in [0, 1]} |u(t)|$$

Consideremos el funcional lineal $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \int_0^1 u(t) \, dt \quad \forall u \in E$$

- a) Probad que $f \in E^*$ y calculad $\|f\|_{E^*}$.
- b) ¿Existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

Ejercicio 3 (2.5 puntos). Sea E un espacio de Banach. Probad que si un subconjunto $A \subset E$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, entonces A es acotado.

Ejercicio 4 (2 puntos). Sea E un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Dotamos a K con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ (que hace compacto a K). Sea $F = C(K)$ con la norma usual. Si $\mu \in F^*$ con $\|\mu\| = 1$ y

$$\langle \mu, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in C(K) \quad \text{tal que} \quad u \geq 0 \text{ en } K$$

probad que existe un único elemento $x_0 \in K$ tal que

$$\langle \mu, f|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*$$

(**Pista:** Encontrad primero $x_0 \in E$ verificando $\langle \mu, f|_K \rangle = \langle f, x_0 \rangle \quad \forall f \in E^*$ y a continuación probado que $x_0 \in K$ usando el teorema de Hahn-Banach).