# Análisis Funcional Examen II

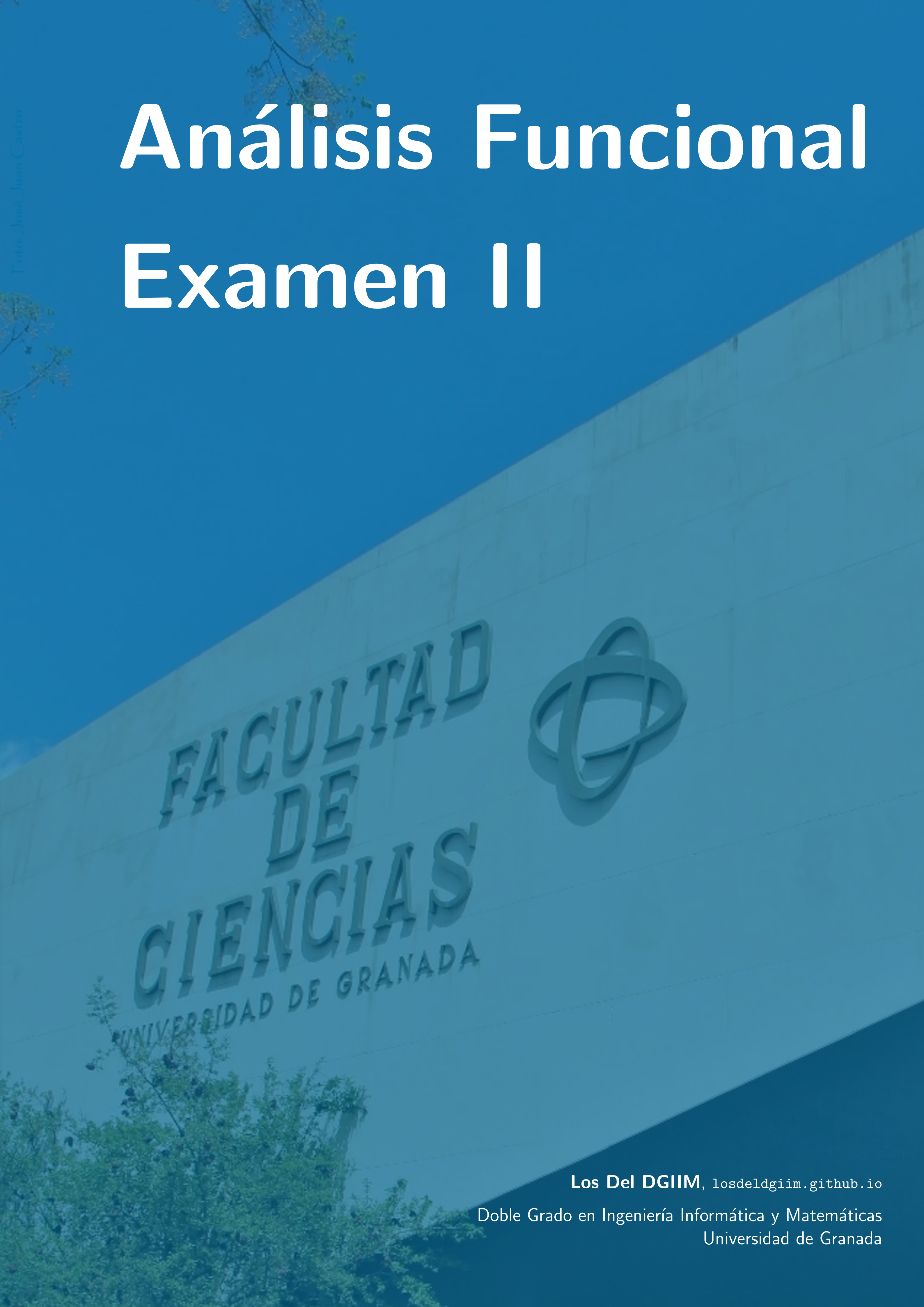


Foto: José Juan Castro

**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Análisis Funcional
# Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

**Asignatura** Análisis Funcional.

**Curso Académico** 2023/24.

**Grado** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

**Descripción** Examen Ordinario.

**Ejercicio 1** (3 puntos)**.** Teorema de representación de Riesz-Fréchet en espacios de Hilbert.

**Ejercicio 2** (2.5 puntos)**.** Sea $E = \{u \in C([0,1]) : u(0) = 0\}$ con la norma usual

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$$

Consideremos el funcional lineal $f : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(u) = \int_0^1 u(t)\ dt \qquad \forall u \in E$$

a) Probad que $f \in E^*$ y calculad $\|f\|_{E^*}$.

b) ¿Existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ y $f(u) = \|f\|_{E^*}$?

**Ejercicio 3** (2.5 puntos)**.** Sea $E$ un espacio de Banach. Probad que si un subconjunto $A \subset E$ es compacto en la topología débil $\sigma(E, E^*)$, entonces $A$ es acotado.

**Ejercicio 4** (2 puntos)**.** Sea $E$ un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Dotamos a $K$ con la topología débil $\sigma(E, E^*)$ (que hace compacto a $K$). Sea $F = C(K)$ con la norma uaual. Si $\mu \in F^*$ con $\|\mu\| = 1$ y

$$\langle \mu, u\rangle \geqslant 0 \qquad \forall u \in C(K) \quad \text{tal que} \quad u \geqslant 0 \text{ en } K$$

probad que existe un único elemento $x_0 \in K$ tal que

$$\langle \mu, f\big|_K\rangle = \langle f, x_0\rangle \qquad \forall f \in E^*$$

(**Pista:** Encontrad primero $x_0 \in E$ verificando $\langle \mu, f\big|_K\rangle = \langle f, x_0\rangle \quad \forall f \in E^*$ y a continuación probado que $x_0 \in$ usando el teorema de Hahn-Banach).